۲

تبدیل z

۲ـ۱ مقدمه

یکی از ابزارهای ریاضی که معمولاً در تحلیل و ترکیب سیستم‌های کنترل زمان‌ـگسسته به‌کار می‌رود تبدیل z است. نقش تبدیل z درسیستم‌های زمان‌ـگسسته مشابه نقش تبدیل لاپلاس در سیستم‌های زمان‌ـپیوسته است.

در یک سیستم کنترل زمان‌ـگسسته خطی یک معادله تفاضلی خطی دینامیک‌های سیستم را مشخص می‌کند. برای آنکه پاسخ سیستمی را به ورودی معینی تعیین کنیم باید چنین معادله تفاضلی را حل کرد. با روش تبدیل z حل معادلات تفاضلی خطی ماهیتاً جبری می‌شود. (درست به‌همان ترتیبی که تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل خطی ثابت را به معادلات جبری برحسب s تبدیل می‌کند، تبدیل z معادلات تفاضلی خطی ثابت را به معادلات جبری برحسب z تبدیل می‌کند.)

هدف اصلی این فصل ارائه تعاریف تبدیل z، قضایای اساسی مربوط به تبدیل z، و روشهای تعیین عکس تبدیل z است. تابع تبدیل پالسی و دنباله وزنی[1] نیز در این فصل بررسی شده‌اند.

۱ـ Weighting sequence

Scanned with CamScanner

سیگنال‌های زمان-گسسته. اگر سیستمی شامل یک عمل نمونه‌برداری از سیگنال‌های زمان-پیوسته یا شامل یک فرآیند تکراری انجام یافته با یک کامپیوتر دیجیتال باشد سیگنال‌های زمان-گسسته حاصل می‌شوند.

دنبالهٔ مقادیر (یا اعداد) را معمولاً به‌صورت $x(k)$ می‌نویسند، که در آن آرگومان k ترتیبی را نشان می‌دهد که طبق آن، مقدار (یا عدد) در دنباله ظاهر می‌شود: مثلاً، $x(0)$، $x(1)$، $x(2)$، ....

اگر یک سیگنال زمان-پیوسته نمونه‌برداری شود، دوره تناوب نمونه‌برداری T یک پارامتر مهم است. دنباله مقادیری را که از عمل نمونه‌برداری حاصل می‌شود عموماً به‌صورت $x(kT)$ می‌نویسند. لیکن برای ساده کردن طرز نمایش، گاهاً حضور صریح T را حذف کرده و $x(kT)$ را به‌صورت $x(k)$ می‌نویسیم.

با به‌کاربردن تبدیل z، یک سیستم خطی زمان-گسسته را می‌توان با تابع تبدیلی نمایش داد که *تابع تبدیل پالسی*[1] گفته می‌شود. در این صورت، تبدیل z سیگنال خروجی را می‌توان به‌صورت حاصلضرب تابع تبدیل پالسی و تبدیل z سیگنال ورودی بیان کرد.

فقط مطالب مقدماتی در بارهٔ تابع تبدیل پالسی در این فصل بحث شده و جزییات بیشتر در فصل ۴ داده خواهد شد.

رئوس مطالب فصل. بخش ۲-۱ مطالب مقدماتی را ارائه می‌کند. بخش ۲-۲ تعریف تبدیل z و موضوعات مربوطه را ارائه می‌دهد. بخش ۲-۳ تبدیل z توابع مقدماتی را به‌دست می‌دهد. خواص و قضایای مهم تبدیل z در بخش ۲-۴ ارائه شده است. روشهای تحلیلی و محاسباتی پیدا کردن عکس تبدیل z در بخش ۲-۵ بررسی شده است. بخش ۲-۶ تابع تبدیل پالسی و دنبالهٔ وزنی را تعریف کرده و سپس حل معادلات تفاضلی را با روش تبدیل z و روش محاسباتی به‌دست می‌دهد. (برنامه‌های کامپیوتری به زبان BASIC برای حل معادلات تفاضلی داده شده است.) سرانجام، بخش ۲-۷ خلاصه فصل را ارائه می‌دهد.

۲-۲ تبدیل z

روش تبدیل z یک روش عملیاتی است که در کارکردن با سیستم‌های زمان-گسسته بسیار نیرومند است. در آنچه که به‌دنبال خواهد آمد تبدیل z یک تابع زمانی را تعریف می‌کنیم.

تبدیل z یک تابع زمانی $x(t)$ که در آن t نامنفی است، یا دنباله‌ای از مقادیر $x(kT)$ یا $x(k)$ که در آن k مقادیر صفر یا مثبت را اختیار کرده و T دوره تناوب نمونه‌برداری است، با معادله

۱- Pulse transfer function

Scanned with CamScanner

زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \qquad (۱-۲)$$

به‌این تبدیل z، *تبدیل z یکطرفه*[۱] اطلاق می‌شود. نماد $\mathcal{Z}$ نشانگر "تبدیل z" است. در تبدیل z یکطرفه فرض می‌کنیم که $x(t) = 0$ برای $t < 0$ یا $x(kT) = x(k) = 0$ برای $k < 0$. توجه کنید که z یک متغیر مختلط است.

تبدیل z $x(t)$ که در آن، $-\infty < t < \infty$ یا $x(kT)$ یا $x(k)$ که در آن k مقادیر صحیح $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ را اختیار می‌کند، با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

به این تبدیل z، *تبدیل z دوطرفه*[۲] اطلاق می‌شود. در تبدیل z دوطرفه، فرض می‌شود که برای $t < 0$ تابع زمانی $x(t)$ غیرصفر باشد و فرض می‌شود دنبالهٔ زمانی $x(kT)$ یا $x(k)$ برای $k < 0$ مقادیر غیرصفر داشته باشد. هر دو تبدیل z یکطرفه و دوطرفه سری‌های توانی z^{-1} هستند. (دومی شامل هم توانهای مثبت و هم توانهای منفی z^{-1} است.) در این کتاب تنها تبدیل z یکطرفه به تفصیل درنظر گرفته می‌شود.

تذکر داده می‌شود که چون تبدیل z، $X(z)$ تابعی از z^{-1} است، بعضی مواقع در نوشته‌ها طرز نمایش $X(z^{-1})$ به‌جای طرز نمایش $X(z)$ به‌کار برده می‌شود. اما در این کتاب، برای اجتناب از هرگونه سردرگمی در کارکردن با قضایای تبدیل z، طرز نمایش $X(z)$ را برای تبدیل z $x(t)$، $x(kT)$ یا $x(k)$ به‌کار خواهیم برد.

برای بیشتر کاربردهای مهندسی تبدیل z یکطرفه جواب صورت‌بستهٔ راحتی در ناحیه همگرایی خود خواهد داشت. توجه کنید هر وقت که $X(z)$، یک سری بی‌پایان برحسب z^{-1}، در بیرون دایرهٔ $|z| = R$ همگرا شود، که در آن، R را *شعاع همگرایی مطلق*[۳] گویند، در استفاده از روش تبدیل z برای حل مسایل زمان‌گسسته لزومی ندارد که هر بار مقادیری از z مشخص شود که بازاء آن $X(z)$ همگرا می‌شود.

توجه کنید که گسترش سمت راست معادله (۲-۱) می‌دهد

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \ldots + x(kT)z^{-k} + \ldots$$

۱ـ One-sided z transform ۲ـ Two-sided z transform ۳ـ Radius of absolute convergence

Scanned with CamScanner

این معادله اخیر ایجاب می‌کند که تبدیل z هر تابع زمان-پیوسته $x(t)$ را می‌توان به‌طور ذهنی به‌صورت سری نوشت. در این حالت z^{-k} وضعیتی در زمان را نشان می‌دهد که در آن دامنه $x(kT)$ حاصل می‌شود. برعکس، اگر $X(z)$ به‌صورت سری به شکل بالا داده شود، عکس تبدیل z را می‌توان به‌طور ذهنی به‌صورت دنباله‌ای از تابع $x(kT)$ به‌دست آورد که با مقادیر $x(t)$ در لحظه‌های زمانی مخصوص به‌خود متناظر باشد.

اگر تبدیل z به‌صورت نسبت دو چند جمله‌ای از z داده شود، در این صورت عکس تبدیل z را می‌توان با چندین روش مختلف مانند روش تقسیم مستقیم، روش محاسباتی، روش گسترش کسرهای جزئی و روش انتگرال معکوس به‌دست آورد (بخش ۲-۵ را برای جزئیات آن ببینید). توجه کنید که روش گسترش کسر جزئی قابل اعمال به تبدیل z مشابه روش قابل اعمال به تبدیل لاپلاس است. انتگرال عکس تبدیل z $X(z)$، چنین داده می‌شود

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(kT) = x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz \qquad (۲-۲)$$

که در آن C دایره‌ای است به‌مرکز مبداء صفحه z به قسمی که تمام قطبهای $X(z)z^{k-1}$ درون آن باشند. [برای استخراج معادله (۲-۲)، بخش ۲-۵ را ببینید.]

قطبها و صفرها در صفحه z. در کاربردهای مهندسی روش تبدیل z $X(z)$ ممکن است به‌شکل زیر باشد

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (۳-۲)$$

یا

$$X(z) = \frac{b_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

که در آن p_iها قطبهای $X(z)$ و z_iها صفرهای $X(z)$ هستند.

موقعیت قطبها و صفرهای $X(z)$ مشخصه‌های $x(k)$، دنبالهٔ مقادیر اعداد را تعیین می‌کنند. درست مانند حالت تحلیل صفحه s سیستم‌های کنترل زمان-پیوسته خطی، ما اغلب از یک نمایش ترسیمی در صفحه z از محل قطبها و صفرهای $X(z)$ استفاده می‌کنیم. (برای جزییات کار به بخش ۳-۷ مراجعه کنید.)

توجه کنید که در مهندسی کنترل و پردازش سیگنال‌ها، $X(z)$ اغلب به‌صورت نسبت چندجمله‌ای‌هائی بر حسب z^{-1} به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \ldots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} \qquad (۴-۲)$$

Scanned with CamScanner

که در آن z^{-1} به عنوان اپراتور تاخیر واحد تعبیر می‌شود. در این فصل، که در آن خواص اساسی و قضیه‌های روش تبدیل z ارائه می‌شود، می‌توان $X(z)$ را برحسب توانهای z داده شده با معادله (۲ـ۳)، یا برحسب توانهای z^{-1} داده شده با معادله (۲ـ۴)، بسته به شرایط، بیان کرد.

در پیداکردن قطبها و صفرهای $X(z)$، راحت‌است که $X(z)$ را به‌صورت نسبت چندجمله‌ای‌هائی از z بیان کنیم. مثلاً

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

روشن است، $X(z)$ قطبهایی در $z = -1$ و $z = -2$ و صفرهایی در $z = 0$ و $z = -0.5$ دارد. اما اگر $X(z)$ را به‌صورت نسبت چندجمله‌ای‌هائی از z^{-1} بنویسیم، $X(z)$ بالا را می‌توان چنین نوشت

$$X(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

اگرچه قطب‌ها در $z = -1$ و $z = -2$ و یک صفر در $z = -0.5$ به‌روشنی از عبارت بالا دیده می‌شوند، صفر در $z = 0$ به‌طور صریح نشان داده نشده است و افراد مبتدی ممکن است نتوانند وجود صفر در $z = 0$ را ببینند. بنابراین، درکارکردن با قطبها و صفرهای $X(z)$، مرجح است که $X(z)$ را به‌صورت نسبت چندجمله‌ای‌هائی از z بیان کرد، نه به‌صورت چندجمله‌ای‌هائی از z^{-1}. علاوه براین، در بدست‌آوردن عکس تبدیل z با استفاده از روش انتگرال معکوس، به‌منظور اجتناب از هرگونه خطا در تعیین تعداد قطبها در مبداء تابع $X(z)z^{k-1}$، مطلوب آن است که $X(z)$ را به‌صورت نسبت چندجمله‌ای‌هائی از z بنویسیم نه به‌صورت چندجمله‌ای‌هائی از z^{-1}.

۲ـ ۳ تبدیل z توابع مقدماتی

تبدیل z چند تابع مقدماتی را در زیر ارائه خواهیم کرد. تذکر داده می‌شود که در نظریه تبدیل z یکطرفه، درنمونه‌گیری یک تابع ناپیوسته $x(t)$ فرض می‌کنیم که تابع از سمت راست پیوسته است؛ یعنی اگر ناپیوستگی در $t = 0$ پیش بیاید دراین صورت به‌جای اینکه $x(0)$ را به‌صورت مقدار متوسط در ناپیوستگی $[x(0-) + x(0+)]/2$ نشان دهیم، مقدار $x(0)$ را برابر $x(0+)$ فرض می‌کنیم.

تابع پله واحد. گیریم تبدیل z تابع پله واحد را بیابیم

$$x(t) = \begin{cases} 1(t) & 0 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

به‌طوری که هم اکنون تذکر داده شد، در نمونه‌گیری یک تابع پله واحد فرض می‌کنیم که این تابع از سمت راست پیوسته است، یعنی $1(0) = 1$. سپس با مراجعه به معادله (۲-۱) داریم

$$X(z) = \mathcal{Z}[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$
$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$
$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad (۲-۵)$$

توجه کنید که سری وقتی همگرا می‌شود که $|z| > 1$. در پیدا کردن تبدیل z، متغیر z به‌عنوان عملگر ساختگی[1] عمل می‌کند. لازم نیست ناحیه‌ای از z که در آن $X(z)$ همگرا باشد مشخص شود. دانستن اینکه چنین ناحیه‌ای وجود دارد کفایت می‌کند. تبدیل z $X(z)$ یک تابع زمانی $x(t)$ که بدین طریق به‌دست می‌آید در تمام صفحه z بجز در قطبهای $X(z)$ معتبر است.

توجه داده می‌شود که $1(k)$ تعریف شده به‌صورت

$$1(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

اغلب *دنبالهٔ پله‌واحد*[2] خوانده می‌شود

تابع شیب واحد. تابع شیب واحد[3] زیر را درنظر بگیرید

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که

$$x(kT) = kT \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

ازاین رو، تبدیل z تابع شیب واحد به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$X(z) = \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$
$$= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots)$$
$$= T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$
$$= \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

۱ـ Dummy operator ۲ـ Unit step sequence ۳ـ Unit ramp

Scanned with CamScanner

تابع چندجمله‌ای a^k. گیریم تبدیل z تابع $x(k)$ تعریف شده به‌صورت زیر را به‌دست آوریم

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = ۰, ۱, ۲, \dots \\ ۰ & k < ۰ \end{cases}$$

که در آن a یک ثابت است. از مراجعه به تعریف تبدیل z، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[a^k] &= \sum_{k=۰}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=۰}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= ۱ + a z^{-۱} + a^۲ z^{-۲} + a^۳ z^{-۳} + \dots \\ &= \frac{۱}{۱ - a z^{-۱}} \\ &= \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

این سری هندسی وقتی همگرا می‌شود که $|z| > |a|$. ناحیه‌ای که در آن این شرایط برقرار است ناحیه بیرون دایره‌ای به‌شعاع $|a|$ و به‌مرکز مبداء صفحهٔ مختلط z است. چنانکه قبلاً گفته شد، در استفاده از تبدیل z کافی است بدانیم که چنین ناحیه‌ای وجود دارد.

تابع نمایی. گیریم تبدیل z تابع زیر را بیابیم

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & ۰ \le t \\ ۰ & t < ۰ \end{cases}$$

از آنجایی که

$$x(kT) = e^{-akT} \qquad k = ۰, ۱, ۲, \dots$$

داریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[e^{-at}] &= \sum_{k=۰}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=۰}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= ۱ + e^{-aT} z^{-۱} + e^{-۲aT} z^{-۲} + e^{-۳aT} z^{-۳} + \dots \\ &= \frac{۱}{۱ - e^{-aT} z^{-۱}} \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

تابع سینوسی. تابع سینوسی زیر را درنظر بگیرید

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & ۰ \le t \\ ۰ & t < ۰ \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

توجه کنید که تبدیل z یک تابع نمایی چنین است

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

و $\sin \omega t$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[\sin \omega t] &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1}\sin \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

مثال۲ ـ ۱.

تبدیل z تابع کسینوسی را به‌دست آورید

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

اگر با روش مشابهی که تبدیل z تابع سینوسی را به‌دست آوردیم پیش برویم ، داریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[\cos \omega t] &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1}\cos \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z^2 - z\cos \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

مثال۲ ـ ۲.

تبدیل z یک تابع سینوسی میرا و یک تابع کسینوسی میرا را به‌دست آورید .

Scanned with CamScanner

برای تابع سینوسی میرا که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\sin\omega t & 0 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

داریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[e^{-at}\sin\omega t] &= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}[e^{-at}e^{j\omega t} - e^{-at}e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}} \end{aligned}$$

به‌طریق مشابهی، برای تابع کسینوسی میرا تعریف شده به‌صورت

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\cos\omega t & 0 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

داریم

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[e^{-at}\cos\omega t] &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{-at}e^{j\omega t} + e^{-at}e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{2-(e^{-j\omega T}+e^{j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}} \\ &= \frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}} \\ &= \frac{z^2-e^{-aT}z\cos\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}} \end{aligned}$$

مثال۲ ـ ۳.

تبدیل z تابع زیر را به‌دست آورید

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

وقتی که تابعی برحسب s داده شود، یک روش پیداکردن تبدیل z متناظر، تبدیل $X(s)$ به $x(t)$ و سپس پیداکردن تبدیل z $x(t)$ است. روش دیگر گسترش $X(s)$ به‌صورت کسرهای

Scanned with CamScanner

ساده و استفاده از جدول تبدیل z برای تعیین تبدیل z جملات گسترش یافته است. روشهای دیگری نیز در بخش ۳-۳ بحث خواهند شد.

اکنون $X(s)$ را به $x(t)$ تبدیل می‌کنیم. عکس تبدیل لاپلاس $X(s)$ چنین است

$$x(t) = 1 - e^{-t} \qquad 0 \le t$$

از این رو

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T} z^{-1})} \\ &= \frac{(1 - e^{-T}) z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

توضیحات. در این بخش با اعمال مستقیم تعریف تبدیل z یکطرفه برای به‌دست آوردن تبدیل z تابع زمانی $x(t)$ چندین مثال ارائه کردیم. در اینجا باید تذکر داده شود که برای به‌دست آوردن تبدیل z معمولاً دو روش دیگر نیز در دسترس است که در بخش ۳-۳ بحث خواهند شد.

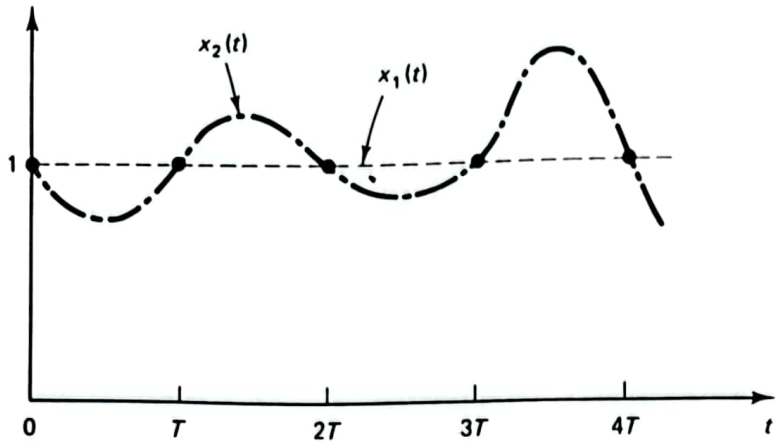
درست مانند کارکردن با تبدیل لاپلاس، جدولی از تبدیلات z توابعی که معمولاً با آنها مواجه می‌شویم در حل مسائل دربارهٔ سیستم‌های زمان‌گسسته بسیار سودمند است. جدول ۲-۱ یک چنین جدولی است.

تذکر این مطلب حائز اهمیت است که اگرچه تبدیل z $X(z)$ و عکس تبدیل z آن $x(k)$ دارای تناظر یک به‌یک هستند، تبدیل z $X(z)$، و عکس تبدیل z آن $x(t)$ تناظر یکتایی ندارند. یعنی، اگر تبدیل z $x(t)$ برابر $X(z)$ باشد، عکس تبدیل z آن لزوماً برابر $x(t)$ نخواهد بود. مثلاً، تبدیل z تابع پله واحد برابر $1/(1 - z^{-1})$ است [معادله (۲-۵) را ببینید]. عکس تبدیل z $1/(1 - z^{-1})$، نیز می‌تواند هر تابع زمانی که دارای یک مقدار واحد در $t = 0, T, 2T, \ldots$ است، باشد. به‌عنوان مثال شکل ۲-۱ را ببینید.

۲-۴ خواص و قضایای مهم تبدیل z

استفاده از روش تبدیل z در تحلیل سیستم‌های کنترل زمان‌گسسته را می‌توان با مراجعه به قضایای تبدیل z تسهیل کرد. در این بخش خواص مهم و قضایای سودمند تبدیل z را ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم که تابع زمانی $x(t)$ تبدیل‌پذیر z بوده و $x(t)$ برای $t < 0$ صفر باشد.

Scanned with CamScanner



شکل۲-۲۹ دو تابع زمان-پیوسته متفاوت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که دارای مقادیر یکسان در $t = 0, T, 2T, \ldots$ هستند.

ضرب در یک مقدار ثابت. اگر $X(z)$ تبدیل z $x(t)$ باشد، در این صورت

$$\mathcal{Z}[ax(t)] = a\ \mathcal{Z}[x(t)] = aX(z)$$

که در آن a یک ثابت است.

جدول۲-۱ جدول تبدیلهای z

	$X(s)$	$x(t)$	$x(k)$یا$x(kT)$	$X(z)$
۱	–	–	دلتای کرونکر $\delta_0(k)$ $\delta_0(x)\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$	۱
۲	–	–	$\delta_0(n-k)$ $1 \quad n=k$ $0 \quad n\neq k$	z^{-k}
۳	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
۴	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
۵	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
۶	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
۷	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$

Scanned with CamScanner

ادامهٔ جدول ۲ـ۱

۸	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
۹	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
۱۰	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
۱۱	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
۱۲	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
۱۳	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
۱۴	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
۱۵	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
۱۶	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
۱۷	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
۱۸			a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
۱۹			a^{k-1} $k=1,2,3,\dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
۲۰			ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
۲۱			k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
۲۲			k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
۲۳			k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
۲۴			$a^k\cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t)=0$ برای $t<0$.

$x(kT)=x(k)=0$ برای $k<0$.

$k=0,1,2,3,\dots$ مگر آنکه به صورت دیگری گفته شود.

Scanned with CamScanner